（7）　経　済　2018年（平成30年）2月14日（水曜日）

サイ・テクこらむ **知と技の発信** 【341】

埼玉大学・理工学研究の現場

局所から超局所へ

桜井 力 准教授

■超局所解析

私の専門は「超局所解析」と呼ばれる分野で、フーリエ解析を含む調和解析を駆使して偏微分方程式の解の持つ性質（滑らかさや特異点の構造）を調べることです。

フーリエ解析は物理学・工学でも基本的な道具として利用されていますので、ご存知の方も多いと思います。関数を単純な平面波に分解し、それぞれの波長成分に対して解析を行い、その重ね合わせとして元の関数の特徴を抽出するものです。

超局所解析の舞台は「相空間」と呼ばれるもので、位置と運動量の2つを独立変数として持つ空間です。通常の関数がそれぞれの位置におけるある物理量を表すならば、そのフーリエ変換は同じ対象を運動量座標を用いて表現したものであるという解釈が成り立ちますが、超局所解析では関数の特異性に注目することにより、双空間上の密度分布として表現することになります。

そして、偏微分作用素はこのような相空間上の分布に作用する積分作用素として表され、これを用いて、偏微分方程式の解の性質を調べることができます。すなわち、超局所解析とは「相空間上の作用素解析」であるということができるでしょう。

■局所可解性

偏微分方程式論の重要なテーマの1つに「局所可解性」があります。これが注目されたのは1957年に発表されたハンス・レヴィの論文からです。それまで、偏微分方程式は境界条件や初期条件といった付加条件を課した上で解を探すというのが一般的であり、なんらの付加条件もない偏微分方程式がどんな小さな領域でも解を持ちえないなどということはありえないことと考えられていました。

いかなる点の近傍においても解が存在しない偏微分方程式が発見されたことは、当時の偏微分方程式論の研究者に大きな衝撃を与えました。レヴィの反例はその後の超局所解析の発展において大きな寄与をもたらしました。

■解の特異性の伝播

超局所解析のもう1つの重要な話題として、「解の特異性の伝播」があります。たとえば光はマックスウェルの方程式によって記述される波動現象ですが、実際の光の伝搬はあたかも光が粒子であるかのように直進し、くっきりとした影を形成するという現象があります。これは超局所解析においては、関数の特異性をもたらす高周波成分は相空間上の常微分方程式によって支配されるという事実の現れであると理解することができます。

近年、新たな調和解析の道具として、ウェーブレット解析の研究が進んでいます。特に、ウェーブレット基底はこれまでの直交関数系とはまったく異なる基底で、一つの関数の相似変換と2進有限小数点の平行移動により、すべての直交基底が得られるというものです。現在、このような直交ウェーブレット展開を用いて、さまざまな物理現象を支配する偏微分方程式の解の挙動の研究を進めています。

さくらい　つとむ　1956年生まれ。85年東京大学大学院理学系研究科博士課程修了。理学博士。埼玉大学助手を経て、90年より現職。専門は偏微分方程式の超局所解析。